OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA JUDEȚEANĂ SUCEAVA 12 MARTIE 2011

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a V-a

1. a) Care este paritatea numărului natural obținut ca diferență dintre suma a 2011 numere naturale impare
şi suma a 2011 numere naturale pare?

b) Stabiliți paritatea numărului $A=(n+3)(3n+5)(n+8)+3^n$, unde $n\in\mathbb{N}$.

Ecaterina Huluță, Suceava

Soluție. a) Suma unui număr impar de numere naturale impare este impară, suma unor numere naturale pare este pară, deci diferenţ a cerută este impară.

b) Cum diferența $(n+8)-(n+3)=5$, numerele $n+8$ şi $n+3$ au parități diferite, deci unul este par. Deoarece un factor al produsului este par, produsul $(n+3)(3n+5)(n+8)$ este par. Numărul 3^n este impar, $\forall n\in\mathbb{N}$. Deci A este impar.

Barem.

a) Suma unui număr impar de numere naturale impare este impară, suma unor numere naturale pare este pară……	2 p
Diferenţ a cerută este impară……………………………………………..……………………………………...	1 p
$n+8$ şi $n+3$ au parități diferite ………………………………………………………………………………..	1 p
Produsul $(n+3)(3n+5)(n+8)$ este par $\forall n\in\mathbb{N}$ ………………………………………………………………	1 p
3^n este $\forall n\in\mathbb{N}$ impar, ………………………………………………………………………………………	1 p
A este impar ………………………………………………………………………..………………….…………	1 p

2. Pe un ecran este scris numărul 32. După fiecare minut numărul este înlocuit cu un altul care este cu 23 mai mare decât produsul cifrelor numărului înlocuit.

a) Ce număr va fi scris pe ecran după 8 minute?

b) Ce număr va fi scris pe ecran după 2 ore şi 15 minute?

(***)

Soluție. a) Avem relațiile: $3\cdot2+23=29$, $2\cdot9+23=41$, $4\cdot1+23=27$, $2\cdot7+23=37$, $3\cdot7+23=44$, $4\cdot4+23=39$, $3\cdot9+23=50$, $5\cdot0+23=23$. Deci după 8 minute pe ecran va fi scris 23.

b) Cum $2\cdot3+23=29$, numărul de pe ecran se repetă din 8 în 8 minute. Dar $2\text{ore }15\text{minute}=135$ minute. Deoarece $135=8\cdot16+7$, numărul de pe ecran va fi al 7-lea din gruparea de 8 care se repetă, adică 50.

Barem.

a) $3\cdot2+23=29,\ 2\cdot9+23=41,\ 4\cdot1+23=27,\ 2\cdot7+23=37,\ 3\cdot7+23=44,\ 4\cdot4+23=39,\ 3\cdot9+23=50,$ $5\cdot0+23=23$ ……………………………………………………………………………………….…...	3 p
Numărul de pe ecran se repetă din 8 în 8 minute……………………………………………………………............	1 p
$2\text{ore }15\text{minute}=135$ minute…………………………………………………………………………………	1 p
$135=8\cdot16+7$ ……………………………………………………………………………………………..	1 p
Numărul de pe ecran va fi al 7-lea din gruparea de 8 care se repetă, adică 50……………………………………...	1 p

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi S suma resturilor obținute prin împărțirea numerelor $1, 2, ..., 100$ la n.

a) Să se calculeze S în cazul $n = 5$.

b) Să se determine valorile lui n pentru care $S = 100$.

G. M. Nr. 12 / 2010

<u>Soluție</u>. **a)** Suma resturilor împărțirii a cinci numere consecutive la 5 este $0+1+2+3+4=10$. Grupăm numerele câte 5
$\underbrace{(1,2,3,4,5),(6,7,8,9,10),,...,(96,97,98,99,100)}_{20\,grupe}$. Atunci $S = 10 \cdot 20 = 200$.

b) Pentru $n = 2$, suma resturilor împărțirii a două numere consecutive la 2 este $0+1=1$ şi aven 50 de perechi de numere consecutive, $S = 1 \cdot 50 = 50 < 100$.

Dacă $n = 3$ grupăm $\underbrace{(1,2,3),(4,5,6),...,(97,98,99)}_{33\,grupe},100$. $S = 3 \cdot 33 + 1 = 100$.

Dacă $n = 4$ grupăm $\underbrace{(1,2,3,4),(5,6,7,8),...,(97,98,99,100)}_{25\,grupe}$. $S = 6 \cdot 25 = 150 > 100$.

Pentru $n = 5$, $S = 10 \cdot 20 = 200 > 100$. Observăm că pentru $n \geq 4$ avem $S > 100$. Deci $n = 3$.

<u>Barem.</u>

a) Suma resturilor împărțirii a cinci numere consecutive la 5 este $0+1+2+3+4=10$	2 p
Grupăm $\underbrace{(1,2,3,4,5),(6,7,8,9,10),,...,(96,97,98,99,100)}_{20\,grupe}$, $S = 10 \cdot 20 = 200$	2 p
b) Suma resturilor împărțirii a două numere consecutive la 2 este $0+1=1$, $S = 1 \cdot 50 = 50 < 100$	1 p
Dacă $n = 3$ grupăm $\underbrace{(1,2,3),(4,5,6),...,(97,98,99)}_{33\,grupe},100$	1 p
$S = 3 \cdot 33 + 1 = 100$, deci $n = 3$	1 p

4. Se consideră o mulțime A formată din opt numere naturale de trei cifre. Fiecărui număr i se ataşează ca ***etichetă*** suma celor trei cifre ale sale. Fiecărei submulțimi nevide a mulțimii A i se ataşează un ***cod*** determinat de suma etichetelor numerelor din submulțime.

a) Care este cel mai mare ***cod*** posibil definit ca mai sus?

b) Să se arate că există cel puț in două submulțimi distincte ale mulțimii A cu acelaşi ***cod***.

Dan Popescu, Suceava

<u>Soluție</u>: a) Codul cel mai mare se obț ine atunci când submulț imea are număr maxim de elemente, adică 8, cu cele mai mari etichete. Acesta este codul mulțimii {888, 889, 898, 988, 899, 989, 998, 999}, adică $24 + 3 \cdot 25 + 3 \cdot 26 + 27 = 204$.

b) Există $2^8 - 1 = 255$ submulțimi nevide ale mulțimii A cu coduri numere naturale cuprinse între 1 şi 204. Astfel, cel puțin două submulțimi vor avea acelaşi cod.

<u>Barem.</u>

a) Mulțimea cu cel mai mare cod este {888, 889, 898, 988, 899, 989, 998, 999}...	2 p
Codul maxim este $24 + 3 \cdot 25 + 3 \cdot 26 + 27 = 204$	2 p
b) O mulțime cu 8 elemente are $2^8 - 1 = 255$ submulțimi nevide cu coduri numere naturale cuprinse între 1 şi 204	2 p
Finalizare	1 p